ТЕМА 5. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Производная и дифференциал

Приращением функции $z = f(x, y)$ в точке (x, y) называется величина

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

где Δx, Δy – приращения независимых переменных. *Частными приращениями* по x и по y называются соответственно величины:

$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Частными производными функции z по x по y в точке (x, y) называются соответственно величины: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ *и* $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ (при условии, что эти пределы существуют). Для них приняты обозначения:

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad f'_x(x, y) \quad и \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y, \quad f'_y(x, y).$$

Функция $z = f(x, y)$ называются *дифференцируемой* в точке (x, y), если ее приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta z = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + o(\rho),$$

$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, где $o(\rho)$ – величина более высокого порядка малости по сравнению с ρ при $\rho \to 0$ (т.е. $o(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$). В этом случае в точке (x, y) существуют частные производные, причем $z'_x =$ $= A(x, y)$, $z'_y = B(x, y)$. Обратно, если функция имеет в точке (x, y) непрерывные частные производные, то она дифференцируема в этой точке.

! Если рассмотреть многомерную функцию полезности $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то вектор составленный из частных производных функции полезности $\dfrac{\partial u}{\partial X} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ называют вектором предельной полезности.

Дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется величина

$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$. Полагая дифференциалы dx и dy независимых переменных равными соответственно Δx и Δy, имеем

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Пример 1. Найти z'_x, z'_y от функции $z = x^2y - 3xy^4 - 1$.

Решение. Считая y константой, имеем $z'_x = 2xy - 3y^4$, считая x константой, имеем $z'_y = x^2\ 12xy^3$.

Пример 2. Найти полный дифференциал функции $z = 2xy - x^2 + y^3$.

Решение. Находим частные производные z'_x, z'_y:

$z'_x = 2y - 2x$; $z'_y = 2x + 3y^2$. Тогда $dz = 2(y - x)dx + (2x + 3y^2)dy$.

Сложная функция. Пусть $z = f(x, y)$, причем $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Пусть для $(u, v) \in D$ функции $x(u, v)$, $y(u, v)$ принимают значения, при которых функция $z = f(x, y)$ определена. Тем самым на множестве D задается функция $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, которая называется сложной функцией; при этом функция $f(x, y)$ называется внешней, а $x(u, v)$, $y(u, v)$ – внутренними функциями.

Частные производные сложной функции находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Пусть $z = z(t, x, y)$, причем $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда z, в конечном счете, зависит только от t. Производная $\frac{dz}{dt}$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Пример 3. Найти z'_t, если $z = e^{xy}$, $x = \sin t$, $y = \ln t$.

Решение. В начале составляем формулу

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$, $x'_t = \cos t$, $y'_t = \frac{1}{t}$. Следовательно,

$z'_t = ye^{xy}\cos t + xe^{xy}\frac{1}{t} = te^{\sin t}(\ln t\cdot\cos t + \frac{\sin t}{t})$.

Пример 4. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \sin(u+v)$, где $u = x^2$, $v = y^2$.

Решение. Так как $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$, то вычисляя частные производные

$\frac{\partial z}{\partial u} = \cos(u+v)$, $\frac{\partial z}{\partial v} = \cos(u+v)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2y$, получаем

$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(u + v)\cdot 2x + \cos(u + v)\cdot 0 = \cos(x^2+y^2)\cdot 2x$,

аналогично $\frac{\partial z}{\partial y} = \cos(x^2+y^2)\cdot 2y$.

Вторые частные производные и вторые производные дифференциалы. Вторыми частными производными функции $z = f(x, y)$ называются частные производные. Их обозначают так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} \equiv (z'_x)'_x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = z''_{xy} \equiv (z'_x)'_y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = z''_{yx} \equiv (z'_y)'_x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} \equiv (z'_y)'_y.$$

Производные z''_{xy} и z''_{yx} называется *смешанными.* Если в рассматриваемой точке смешанные производные непрерывны, то они равны в этой точке.
Аналогично определяются частные производные более высоких порядков.

Вторым дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется выражение

$$d^2z = d(dz) = (dz)'_x\Delta x + (dz)'_y\Delta y = z''_{xx}(\Delta x)^2 + 2z''_{xy}\Delta x\Delta y + z''_{yy}(\Delta y)^2.$$

Аналогично определяются величины d^3z, d^4z и т.д.

Пример 5. Дана функция $z = x^3 + 2x^2y - 8xy^2 + y^3$. Найти ее частные производные второго порядка.

Решение. Находим сначала первые производные:
$z'_x = 3x^2 + 4xy - 8y^2$, $z'_y = 2x^2 - 16xy + 3y^2$.
Пользуясь определениями и правилами дифференцирования, получаем $z''_{xx} = 6x + 4y$, $z''_{xy} = 4x - 16y$, $z''_{yy} = -16x + 6y$.

Пример 6. Дана функция $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$. Показать, что $z''_{xx} + z''_{yy} \equiv 0$.

Решение. Найдем частные производные первого и второго порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2 + 2x + 1)'_x}{x^2 + y^2 + 2x + 1} = \frac{2x + 2}{x^2 + y^2 + 2x + 1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2 + 2x + 1)'_x}{x^2 + y^2 + 2x + 1} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 2x + 1},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{2x + 2}{x^2 + y^2 + 2x + 1}\right)'_x = \frac{2(x^2 + y^2 + 2x + 1) - (2x + 2)(2x + 2)}{(x^2 + y^2 + 2x + 1)^2} = \frac{2y^2 - 2x^2 - 4x - 2}{(x^2 + y^2 + 2x + 1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 2x + 1}\right) = \frac{2(x^2 + y^2 + 2x + 1) - 2y2y}{(x^2 + y^2 + 2x + 1)^2} = \frac{2x^2 - 2y^2 + 4x + 2}{(x^2 + y^2 + 2x + 1)^2}.$$

Составив сумму $z''_{xx} + z''_{yy}$ вторых частных производных, убедимся, что она тождественно равна нулю:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - 2x^2 - 4x - 2}{(x^2 + y^2 + 2x + 1)^2} + \frac{2x - 2y + 4x + 2}{(x + y + 2x + 1)} \equiv 0.$$

Неявные функции и их дифференцирование. Уравнение $F(x, y) = 0$, имеющее решение (x_0, y_0), определяет в окрестности x_0 переменную y как непрерывную функцию x при условии, что производная $F'_y(x, y) \neq 0$ и непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Если, кроме того, в окрестности этой точки существует непрерывная производная F'_x, то неявная функция $y = y(x)$ имеет производную, определяемую по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Рассмотрим теперь уравнение $F(x, y, z) = 0$, связывающие переменные x, y, z; при этом функция $z = \varphi(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные, которые определяются по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Пример 7. Найти частные производные функции

$$x^2 + x\sin y + 2z + +e^z = 0.$$

Решение: $F'_x = 2x + \sin y$; $F'_y = x\cos y$; $F'_z = 2 + e^z$, тогда частные производные равны

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + \sin y}{2 + e^z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x\cos y}{2 + e^z}.$$

Экстремумы функций нескольких переменных

Точка (x_0, y_0) называется *точкой минимума (максимума)* функций $z = f(x, y)$, если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функция определена и удовлетворяет неравенству $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ (соответственно $f(x, y) < f(x_0, y_0)$). Точка максимума и минимума называются *точками экстремума* функции.

Необходимое условие экстремума. Если в точке экстремума функция имеет первые частные производные, то они обращаются в этой точке в нуль. Отсюда следует, что для отыскания точек экстремума такой функции $z = f(x, y)$ следует решить систему уравнений $f'_x(x, y) = 0$, $f'_y(x, y) = 0$. Точки, координаты которых удовлетворяют этой системе, называются *критическими точками* функции. Среди них могут быть точки максимума, точки минимума, а также точки, не являющиеся точками экстремума.

Достаточные условия экстремума используются для выделения точек экстремума из множества критических точек и перечислены ниже.

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в критической точке непрерывные вторые производные. Если в этой точке выполняется условие

$$\Delta = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0,$$

то она является точкой минимума при $f''_{xx} > 0$ и точкой максимума при $f''_{xx} < 0$. Если в критической точке $\Delta < 0$, то она не является точкой экстремума. В случае $\Delta = 0$ требуется более тонкое исследование характера критической точки, которая в этом случае может быть точкой экстремума, а может и не быть таковой.

Пример 8. Найти экстремум функции

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 17.$$

Решение. Находим частные производные $f'_x = 2x - 4$, $f'_y = 2y + 6$, $f''_{xx} = 2$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 2$. Решаем систему

$$\begin{cases} f'_x = 0, \\ f'_y = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x - 4 = 0, \\ 2y + 6 = 0. \end{cases} \Rightarrow x = 2,\ y = -3.$$

Используя достаточные условия экстремума $\Delta = 2 \cdot 2 - 0 = 4 > 0$, $A = 2 > 0$, делаем вывод, что точка $M_0(2, -3)$ – точка минимума, причем $\min f(x, y) = f(2, -3) = 4$.

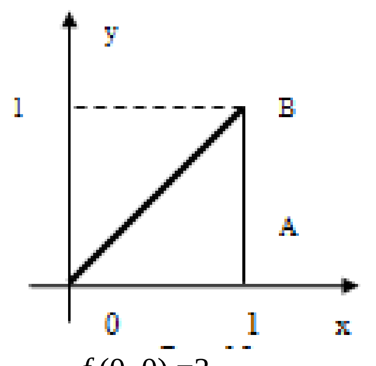
Нахождение наибольшего и наименьшего значения. Для того чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x,y)$ в замкнутой области, нужно:

1) найти все стационарные точки внутри этой области, вычислить значение функции в этих точках;

2) найти наибольшее и наименьшее значение функции на границе области;

3) из всех этих чисел выбрать соответственно наибольшее и наименьшее значение.

Пример 9. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y) = 3 - 2x^2 - xy - y^2$ в замкнутой области, заданной системой неравенств: $x \le 1$, $y \ge 0$, $y \le x$.



Решение:

1. Область представляет собой треугольник OAB (рис.12), причем O (0, 0), A (1, 0), B (1, 1). Находим стационарные точки внутри области:

$f'_x = -4x - y$, $f'_y = -x - 2y$; $f'_x = 0$, $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, при $x = 0$, $y = 0$;

$f(0, 0) = 3$.

2. На стороне OA: $y = 0$, $0 \le x \le 1$ функции $z = f(x, 0) = 3 - 2x^2$ зависит от одной переменной x; $z'(x) = -4x$, $z''(x) = -4$, $z'(x) = 0$ при $x = 0$; $z''(0) = -4 < 0$, $x=0$ – точка максимума: $\underline{z(0) = f(0, 0) = 3}$.

3. На прямой AB: $x = 1$, $0 \le y \le 1$, функция $z = f(1, y) = 3 - 2 - y - y^2 =$
$= 1 - y - y^2$ зависит только от y; $z'(y) = -1 - 2y$, $z'(y) = 0$ при
$y = -1/2$, но эта точка не принадлежит отрезку AB.

4. На стороне OB: $y = x$, $0 \le x \le 1$ функция зависит только от x: $z = f(x, x) = 3 - 2x^2 - x^2 - x^2 = 3 - 4x^2$, $z'(x) = -8x$, $z''(x) = -8$, $z = 0$ при $x = = 0$, $z''(0) = -8 < 0$, $\underline{f(0, 0) = 3}$.

Вычисляем значения функции в точках A и B: $\underline{f(A) = f(1, 0) = 1,}$
$\underline{f(B) = f(1, 1) = -1.}$

Следовательно, в заданной области наименьшее значение данной функции равно –1, а наибольшее равно 3.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется функцией двух независимых переменных? Областью определения?
2. Что называется пределом функции $z = f(x,y)$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$?
3. Дать определение непрерывности функции двух независимых переменных в точке и в области.
4. Дать определение частной производной функции двух независимых переменных по одной из них.
5. Что называется частным (полным) приращением и частным (полным) дифференциалом по x функции $z = f(x,y)$.
6. Какая функция двух независимых переменных называется дифференцируемой?
7. Что называется касательной плоскостью к поверхности в данной ее точке, выписать уравнение касательной и нормали к поверхности.
8. Вывести правило дифференцирования сложной функции.
9. Дать определение точки экстремума функции двух независимых переменных.
10. Сформулировать необходимое и достаточное условие экстремума для функции двух переменных.
11. Описать способ нахождения наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных в заданной замкнутой области.
12. Дать определение точки условного экстремума.
13. Дать определение градиента и производной по направлению